

2006J – BCHS

EJERCICIO A.

**Problema 1.**

Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250.000 euros en terreno industrial y 250.000 euros en terreno rústico. La segunda, invirtió 125.000, 250.000 y 125.000 euros en terreno urbano, industrial y rústico, respectivamente, y la tercera, 100.000, 100.000 Y 200.000 euros en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año, venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es del 13,75%, la de la segunda del 11,25% y, finalmente, la de la tercera es del 10%. Determina la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno por separado.

**Problema 2.**

Dada la función  $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$ , se pide:

Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenadas.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Máximos y mínimos locales.

Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

**Problema 3.**

Los beneficios anuales  $B(x)$ , en miles de euros, previstos por una empresa para los próximos años vienen dados por la siguiente función, donde  $x$  representa el número de años a partir del actual:

$$B(x) = \frac{25x}{x^2 + 16}$$

¿Cuántos años han de transcurrir para que la empresa obtenga el máximo beneficio y cuál es el valor de dicho beneficio? Justifica que es máximo.

¿Puede esta empresa tener pérdidas algún año? ¿Por qué?

**Problema 4.**

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $P(A \cup B) = 0,9$ ;  $P(\bar{A}) = 0,4$ , donde  $\bar{A}$  denota el suceso contrario o complementario del suceso  $A$ , y  $P(A \cap B) = 0,2$ . Calcula las probabilidades siguientes:  $P(B)$ ,  $P(A/B)$ ,  $P(A \cap \bar{B})$  y  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ .

**Problema 1.**

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & -6 \\ x & & + z = 5 \\ 2x - y & & = 11 \end{array} \right\}$$

**Problema 2.**

Una refinera de petrleo adquiere dos tipos de crudo, ligero y pesado, a un precio de 70 y 65 euros por barril, respectivamente. Con cada barril de crudo ligero la refinera produce 0,3 barriles de gasolina 95, 0,4 barriles de gasolina 98 y 0,2 barriles de gasoil. Asimismo, con cada barril de crudo pesado produce 0,1, 0,2 y 0,5 barriles de cada uno de estos tres productos, respectivamente. La refinera debe suministrar al menos 26.300 barriles de gasolina 95, 40.600 barriles de gasolina 98 y 29.500 barriles de gasoil. Determina cuantos barriles de cada tipo de crudo debe comprar la refinera para cubrir sus necesidades de produccion con un coste minimo y calcula este.

**Problema 3.**

Estudia la continuidad en el intervalo  $[-3,3]$  de la funcion:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 10 & -3 \leq x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x < 1 \\ (x + 3)/2 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Halla la integral entre 2 y 3 de la funcion  $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ .

**Problema 4.**

El volumen de produccion diario en tres fabricas diferentes de una misma empresa es de 1.000 unidades en la primera fabrica, 1.500 unidades en la segunda y 2.500 en la tercera. Por ciertos desajustes, algunas unidades salen defectuosas. En concreto, lo son el 1 % de las unidades producidas en las dos primeras fabricas y el 3% de las producidas en la tercera.

¿Que proporcion de unidades fabricadas son correctas?

Si se tiene una unidad defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la tercera fabrica?

## RESOLUCIÓN

### EJERCICIO A. 2006J

#### Problema 1.

Codificamos las incógnitas:

x: % de rentabilidad obtenida por el terreno urbano

y: % de rentabilidad obtenida por el terreno industrial

z: % de rentabilidad obtenida por el terreno rústico

Codificamos la información mediante un sistema de ecuaciones:

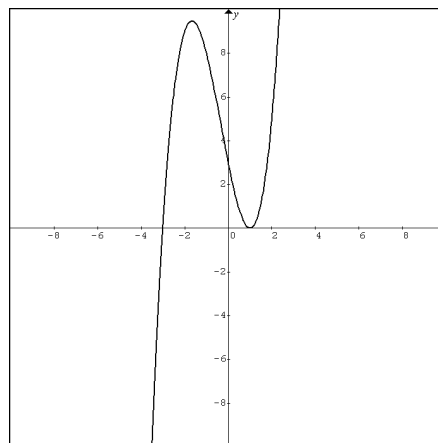
$$\begin{cases} 500000x + 250000y + 250000z = 137500 \\ 125000x + 250000y + 125000z = 56250 \\ 100000x + 100000y + 200000z = 40000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x + 20y + 20z = 11 \\ 20x + 40y + 20z = 9 \\ 10x + 10y + 20z = 4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones mediante el método matricial de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 4 \\ 40 & 20 & 20 & 11 \\ 20 & 40 & 20 & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 4 \\ 0 & -20 & -60 & -5 \\ 0 & 20 & -20 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10 & 10 & 20 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & -80 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0'20 = 20\% \\ y = 0'10 = 10\% \\ z = 0'05 = 5\% \end{cases}$$

#### Problema 2.

La gráfica de la función es la siguiente curva:



Como es una función polinómica, su dominio es  $\mathbb{R}$ . Para hallar los puntos de corte con los ejes:

Con OY:  $x = 0$ ,  $y = 3$  El punto es  $(0,3)$

Con OX:  $y = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ ,  $x = 1$  (raíz doble) Los puntos son  $(-3,0)$ ,  $(1,0)$

Vamos a hallar en primer lugar los extremos relativos.

En ellos  $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$ ,  $x = -5/3$

$y'' = 6x + 2 \Rightarrow y''(1) > 0 \Rightarrow$  En  $x = 1$ , punto  $(1,0)$ , hay un mínimo relativo.

$y''(-5/3) < 0 \Rightarrow$  En  $x = -5/3$ , punto  $(-5/3, 256/27)$ , hay un máximo relativo.

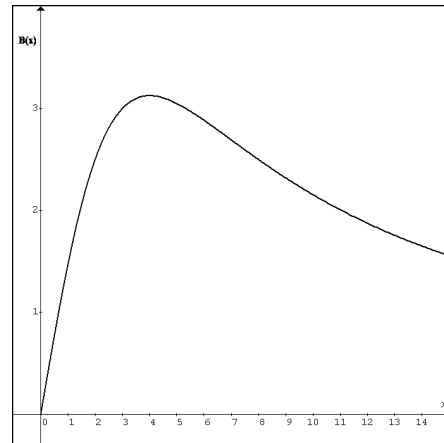
Tendremos, por tanto:

En los intervalos  $]-\infty, -3[$  y  $]1, +\infty[$  es creciente

En el intervalo  $]-3, 1[$  es decreciente

### Problema 3.

La gráfica de la función es la siguiente curva:



Vamos a hallar en primer lugar los extremos relativos.

$$\text{En ellos } y' = 0 \Rightarrow \frac{25(x^2 + 16) - 25x(2x)}{(x^2 + 16)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-25x^2 + 400}{(x^2 + 16)^2} = 0 \Rightarrow -25x^2 + 400 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Podemos comprobar mediante una tabla de valores que:

En el intervalo  $]0,4[$ ,  $B(x)$  es creciente

En el intervalo  $]4,+\infty[$ ,  $B(x)$  es decreciente

Por tanto, en el punto  $(4, 3,125)$ , la función  $B(x)$  es máxima. El beneficio es 3125 €.

Para que  $B(x)$  tenga pérdidas,  $B(x) < 0$ . Como el denominador siempre es positivo:  $25x < 0$  Pero, en los próximos años,  $x > 0$ , lo cual nos indica que siempre  $B(x) > 0$ .

Por tanto, nunca tendrá pérdidas, aunque las ganancias irán disminuyendo constantemente.

### Problema 4.

Tenemos:

$$P(\bar{A}) = 0,4, P(A) = 0,6, P(A \cup B) = 0,9, P(A \cap B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,9 = 0,6 + P(B) - 0,2 \Rightarrow P(B) = 0,5$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\text{Empleando las leyes de Morgan: } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$$

Mediante un esquema gráfico, puedes ver que:  $P(A \cap \bar{B}) = 0,4$

**Problema 1.**

Para poder aplicar Cramer, es necesario que  $|A| \neq 0$  (siendo A la matriz de los coeficientes).

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{Se puede aplicar el método de Cramer.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3 ; x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-25}{5} = -5 ; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

**Problema 2.**

Identificamos las variables del problema.

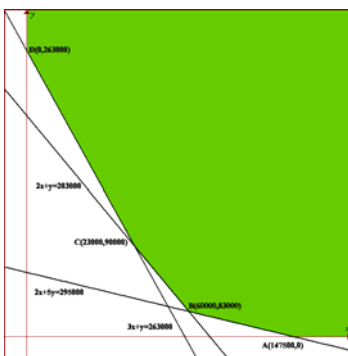
x: nº de barriles del tipo ligero, y: nº de barriles del tipo pesado

Expresamos las restricciones o limitaciones que da el problema, mediante un sistema de desigualdades.

$$\begin{aligned} x \geq 0 & & y \geq 0 \\ 0'3x + 0'1y \geq 26300 & & 3x + y \geq 263000 \\ 0'4x + 0'2y \geq 40600 & & 2x + y \geq 203000 \\ 0'2x + 0'5y \geq 29500 & & 2x + 5y \geq 295000 \end{aligned}$$

Establecemos la función objetivo lineal que deberemos maximizar o minimizar:  $C(x, y) = 70x + 65y$

Realizamos una representación gráfica del sistema de desigualdades, determinando el denominado conjunto o región factible y los vértices de este conjunto.



Buscamos la solución óptima e interpretamos los resultados. Construimos esta tabla:

Vértice	Función objetivo $C(x, y) = 15x + 11y$
A(147500,0)	10325000
B(60000,83000)	9595000
C(23000,90000)	7460000
D(0,263000)	17095000

La **solución óptima** es: 23000 barriles del tipo ligero y 90000 del pesado. El coste es 7460000 €.

**Problema 3.**

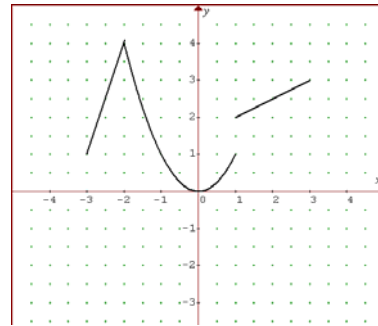
a)

La gráfica de la función es:

Es continua en el intervalo  $]-3, -2[$  por ser polinómica

Es continua en el intervalo  $]-2, 1[$  por ser polinómica

Es continua en el intervalo  $]1, 3[$  por ser polinómica



En  $x = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 3 \cdot (-2) + 10 = 4$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = (-2)^2 = 4$

En  $x = -2$  es continua, ya que  $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

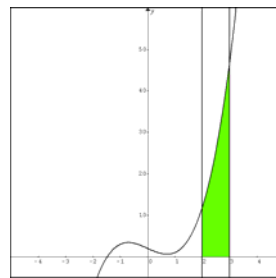
En  $x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1+3)/3 = 2$

En  $x = 1$  es discontinua, ya que  $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b)  $\int_2^3 (2x^3 - 3x + 2) = \left[ \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^3 = \left( \frac{162}{4} - \frac{27}{2} + 6 \right) - (8 - 6 + 4) = 33 - 6 = 27$

Nos piden una integral que se corresponde con el área del recinto sombreado:



**Problema 4.**

Vamos a construir una tabla de contingencia con los siguientes sucesos:

A: Ser de la fábrica A,

B: Ser de la fábrica B,

C: Ser de la fábrica C

D: Ser defectuosa,

$\bar{D}$ : No ser defectuosa,

	A	B	C	Totales
D	10	15	75	100
$\bar{D}$	990	1435	2425	4900
Totales	1000	1500	2500	5000

Nos piden  $P(D) = \frac{100}{5000} = 0'02 = 2\%$

Nos piden  $P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{75/5000}{100/5000} = \frac{75}{100} = 0'75 = 75\%$

**Problema 1.**

Determina la matriz  $A$  que verifica la ecuación  $AB + A = 2B^t$ , donde  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B^t$  representa la matriz transpuesta de  $B$ .

**Problema 2.**

Una destilería produce dos tipos de whisky *blend* mezclando sólo dos maltas destiladas distintas, A y B. El primero tiene un 70% de malta A y se vende a 12 €/litro, mientras que el segundo tiene un 50% de dicha malta y se vende a 16 €/litro. La disponibilidad de las maltas A y B son 132 y 90 litros, respectivamente. ¿Cuántos litros de cada whisky debe producir la destilería para maximizar sus ingresos, sabiendo que la demanda del segundo whisky nunca supera a la del primero en más del 80%? ¿Cuáles serían en este caso los ingresos de la destilería?

**Problema 3.**

Determina el valor de  $a$  para que la siguiente función sea continua en  $x = -1$ :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & x < -1 \\ ax + 2 & -1 \leq x < 1 \\ (2x - 11)/(x - 3) & x \geq 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de la función anterior en el caso  $a = 0$ .

Halla la integral entre  $-2$  y  $2$  de la función  $f(x) = x^3 - 2$ .

**Problema 4.**

Un estudio revela que el 10% de los oyentes de radio sintoniza a diario las cadenas *Music* y *Rhythm*, que un 35% sintoniza a diario *Music* y que el 55% de los oyentes no escucha ninguna de las dos emisoras. Obtén:

La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena *Rhythm*.

La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena *Rhythm* pero no la *Music*.

La probabilidad de que un oyente, del que sabemos que escucha *Rhythm*, escuche *Music*.

**Problema 1.**

En el primer curso de bachillerato de un instituto hay matriculados un total de 65 alumnos divididos en tres grupos: A, B y C. Comen en el centro 42 de ellos, que corresponden a la mitad de los del grupo A, las cuatro quintas partes de los del B y las dos terceras partes de los del C. A una salida fuera del centro acudieron las tres cuartas partes de los alumnos del grupo A, todos los del B y las dos terceras partes de los del C, sumando en total 52 estudiantes. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

**Problema 2.**

Dada la función  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  se pide:

Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

Ecuación de sus asíntotas.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Máximos y mínimos relativos.

Utiliza la información anterior para representada gráficamente.

**Problema 3.**

El dinero en efectivo, en euros, de una oficina bancaria durante las seis horas que permanece la caja abierta al público viene dado por la expresión  $C(t) = 2000 - 234t + 27t^2$ , siendo  $t$  el tiempo en horas transcurrido desde la apertura.

Determina:

¿En qué momento hay más dinero en efectivo y cuánto?

¿En qué momento hay menos dinero en efectivo y cuánto? Justifica que son máximo y mínimo, respectivamente.

**Problema 4.**

Dados dos sucesos aleatorios independientes se sabe que la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es  $3/25$  y la de que ocurra al menos uno de los dos es  $17/25$ . Calcula la probabilidad de cada uno de los dos sucesos.

## RESOLUCIÓN

### EJERCICIO A. 2006S

#### Problema 1.

Una opción para resolverlo sería la siguiente:

Como  $A = A \cdot I$

$A \cdot B + A = A \cdot B + A \cdot I = A \cdot (B + I) = 2 \cdot B^t \Rightarrow A = 2 \cdot B^t \cdot (B + I)^{-1}$  Y realizamos las operaciones.

Otra opción sería:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a & -a+2b \\ 3c & -c+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4a & -a+3b \\ 4c & -c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 3/2, b = 1/2, c = -1/2, d = 7/6$$

Por cualquier procedimiento  $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 7/6 \end{pmatrix}$

#### Problema 2.

Identificamos las variables del problema.

$x$ : nº de litros del primer whisky,  $y$ : nº de litros del segundo whisky

Expresamos las restricciones o limitaciones que da el problema, mediante un sistema de desigualdades. En este caso has de tener en cuenta lo siguiente:

El primer whisky tiene un 70 % de malta A y el resto (un 30 %) del tipo B.

El segundo whisky tiene un 50 % de malta A y el resto (un 50 %) del tipo B.

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$0.70x + 0.50y \leq 132 \quad 7x + 5y \leq 1320$$

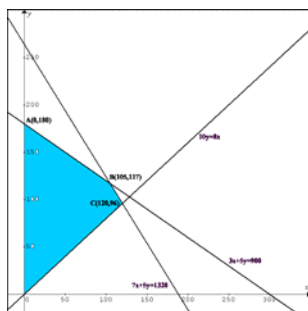
$$0.50x + 0.50y \leq 90 \quad 5x + 5y \leq 900$$

$$y \leq 0.80x \quad 10y \leq 8x$$

Establecemos la función objetivo lineal que deberemos maximizar o minimizar.

$$I(x, y) = 12x + 16y$$

Realizamos una representación gráfica del sistema de desigualdades, determinando el denominado conjunto o región factible y los vértices de este conjunto.



Buscamos la solución óptima e interpretamos los resultados. Construimos esta tabla:

Vértice	Función objetivo $I(x, y) = 12x + 16y$
A(0,180)	2880
B(105,117)	3132
C(120,96)	2976
D(0,0)	0

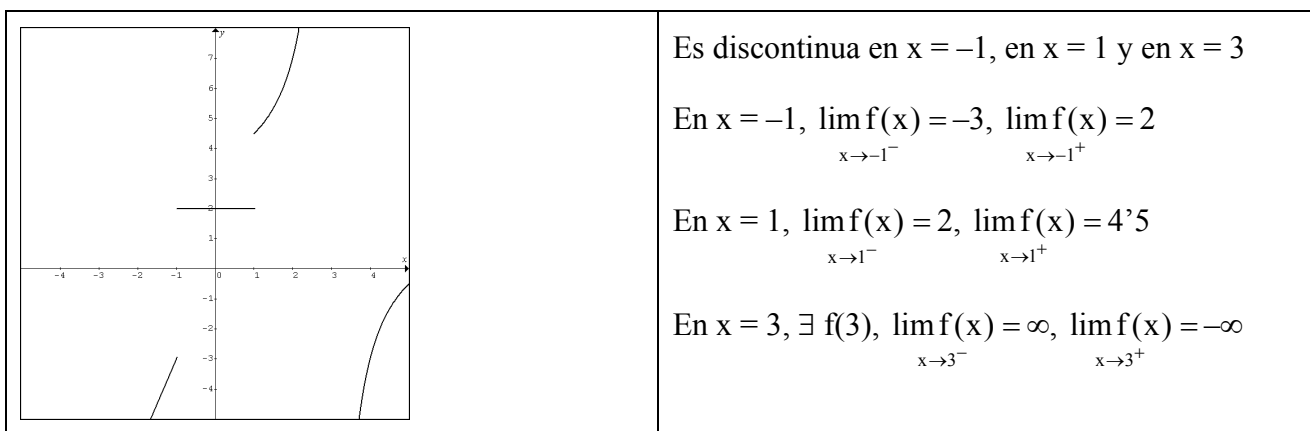
La **solución óptima** es: 105 del primer tipo y 117 del segundo. El ingreso es 3132 €.

### Problema 3.

Para que  $f$  sea continua en  $x = -1$ :  $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

$$f(-1) = -a + 2, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3 + a, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -a + 2 \Rightarrow -a + 2 = -3 + a \Rightarrow 5 = 2a \Rightarrow a = 5/2$$

Cuando  $a = 0$ , la gráfica de la función es.



Halla la integral entre  $-2$  y  $2$  de la función  $f(x) = x^3 - 2$ .

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 2) = \left[ \frac{x^4}{4} - 2x \right]_{-2}^2 = (4 - 4) - (4 + 4) = -8$$

### Problema 4.

M: El oyente sintoniza la cadena *Music*

R: El oyente sintoniza la cadena *Rhythm*

Tenemos:

$$P(M \cap R) = 0'1, P(M) = 0'35, P(\overline{M} \cap \overline{R}) = 0'55 \Rightarrow P(M \cup R) = 1 - P(\overline{M} \cap \overline{R}) = 0'45$$

Nos piden:

$$P(R). \text{ Como } P(M \cup R) = P(M) + P(R) - P(M \cap R) \Rightarrow 0'45 = 0'35 + P(R) - 0'1 \Rightarrow P(R) = 0'2$$

$$P(\overline{M} \cap R). \text{ Mediante un esquema gráfico, puedes ver que: } P(\overline{M} \cap R) = 0'1.$$

$$P(M/R). P(M/R) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{0'1}{0'2} = \frac{1}{2} = 0'5$$

El apartado b) se puede también contestar utilizando este último cálculo ya que

$$P(\overline{M}/R) = 1 - P(M/R) = 0'5 \text{ y } P(\overline{M} \cap R) = P(\overline{M}/R) \cdot P(R) = 0'5 \cdot 0'2 = 0'1$$

**Problema 1.**

Codificamos las incógnitas:

x: nº de alumnos del grupo A, y: nº de alumnos del grupo B, z: nº de alumnos del grupo C

Codificamos la información mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + \frac{2z}{3} = 42 \\ \frac{3x}{4} + y + \frac{2z}{3} = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 65 \\ 15x + 24y + 20z = 1260 \\ 9x + 12y + 8z = 624 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones mediante el método matricial de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 9 & 5 & 285 \\ 0 & 3 & -1 & 39 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 9 & 5 & 285 \\ 0 & 0 & 8 & 168 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 20 \\ z = 21 \end{cases}$$

**Problema 2.**

A partir de la gráfica, podemos observar:

El dominio es  $\mathbb{R}$  (Siempre  $\exists f(x)$ ).

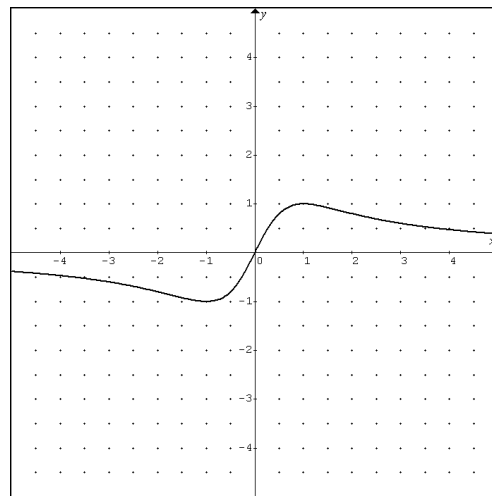
La única asíntota es horizontal y su ecuación es  $y = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

El mínimo relativo<sup>(\*)</sup> es  $(-1, -1)$  y el máximo relativo es  $(1, 1)$ ; por tanto:

Es decreciente en  $]-\infty, -1[$  y  $]1, +\infty[$

Es creciente en  $]-1, 1[$



Hay que tener en cuenta que en los extremos relativos,  $y' = 0$ :

Como  $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$ , si  $y' = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Si hay extremos relativos, se producirán en  $x = -1, x = 1$ . Podemos comprobar por alguno de los criterios que conocemos que en  $x = -1$  hay un mínimo y que en  $x = 1$  hay un máximo.

### Problema 3.

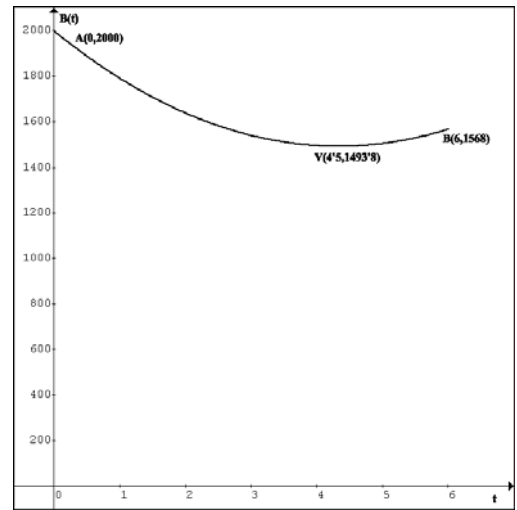
El gráfico correspondiente a la función en el intervalo  $[0,6]$  es:

Nos piden:

El máximo de la función. En este caso es un máximo absoluto y se produce al comienzo de la jornada, es decir, cuando  $t = 0$  y es 2000 €.

El mínimo de la función. En este caso es, además un mínimo relativo o el vértice de la parábola.

Podemos seguir cualquiera de los procedimientos. En cualquier caso, se produce cuando  $t = 4,5$



### Problema 4.

Nos dan:

$$P(A \cap B) = 3/25 \text{ y } P(A \cup B) = 0,17/25$$

Al ser dos sucesos independientes:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Además, sabemos que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Tendremos, por tanto, el siguiente sistema de ecuaciones:

Haciendo  $P(A) = x$  y  $P(B) = y$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) + P(B) = \frac{20}{25} \\ P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{25} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 25x + 25y = 20 \\ 25xy = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 25x = 20 - 25y \\ 25xy = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(20 - 25y) \cdot y = 3 \Rightarrow 20y - 25y^2 = 3 \Rightarrow 25y^2 - 20y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3/5 \\ y = 1/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/5 \\ x = 3/5 \end{cases}$$

Como consecuencia:  $P(A) = 3/5$ ,  $P(B) = 1/5$  o bien  $P(A) = 1/5$ ,  $P(B) = 3/5$

**Problema 1.**

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , calcula  $A \cdot A^t - 5 \cdot A^{-1}$ , siendo  $A^t$  y  $A^{-1}$  las matrices transpuesta e inversa de  $A$ , respectivamente.

**Problema 2.**

Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M1 y M2. Para fabricar una tonelada de A hacen falta 500 kg de M1 y 750 kg de M2, mientras que las cantidades de M1 y M2 utilizadas para fabricar una tonelada de B son 800 kg y 400 kg respectivamente. La empresa tiene contratado un suministro máximo de 10 Tm de cada materia prima y vende a 1000 € y 1500 € cada Tm de abono A y B respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son éstos?

**Problema 3.**

a) Estudia la continuidad de la función  $y = f(x)$  en el intervalo  $[-4,2]$ , siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ x^2 & -3 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Calcula el área limitada por la gráfica de la función  $y = f(x)$ , las rectas  $x = -3$ ,  $x = 2$  y el eje de abscisas.

**Problema 4.**

Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivo en el 96 % de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94 % de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:

- La probabilidad de que el test dé positivo.
- La probabilidad de que sea portadora del virus, si el resultado del test es positivo.
- La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.

**Problema 1.**

Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12000, 15000 y 22000 euros respectivamente. Un concesionario ha ingresado 1265000 euros por la venta de automóviles de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como los otros dos juntos y del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15000 euros?

**Problema 2.**

Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema determinado por las siguientes inecuaciones:

$$3y - 4x - 8 \leq 0, \quad y \geq -4x + 4, \quad y \geq 2, \quad x \leq 1$$

Halla los vértices de la región anterior.

Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función  $f(x,y) = 3x - y$  en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

**Problema 3.**

La función  $y = f(x)$  tiene las siguientes propiedades:

Su dominio es la recta real salvo los puntos  $-1, 1$ . Es continua en todo su dominio y corta al eje OX en el punto  $(2,0)$ .

Tiene una asíntota horizontal en  $y = 0$ , con  $f(x) < 0$  si  $x > 2$  y  $f(x) > 0$  si  $x < 2, x \neq 1, x \neq -1$ .

Tiene una asíntota vertical en  $x = 1$ , con  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ .

Tiene una asíntota vertical en  $x = -1$ , con  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ .

Tiene un mínimo en  $(4,-2)$  y otro en  $(0,3)$ . No tiene máximos.

Representa gráficamente dicha función.

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**Problema 4.**

La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es  $0'1$ . La probabilidad de que suene ésta si se ha producido algún incidente es  $0'97$  y la probabilidad de que suene si no se ha producido ningún incidente es  $0'02$ .

Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.

En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

## RESOLUCIÓN

### EJERCICIO A. 2007J

#### Problema 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0'6 & -0'4 \\ 0'2 & 0'2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t - 5 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

#### Problema 2.

Identificamos las variables del problema.

x: nº de Tm de abono A, y: nº de Tm de abono B

Expresamos las restricciones o limitaciones que da el problema, mediante un sistema de desigualdades.

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$0'5x + 0'8y \leq 10 \Leftrightarrow 5x + 8y \leq 100$$

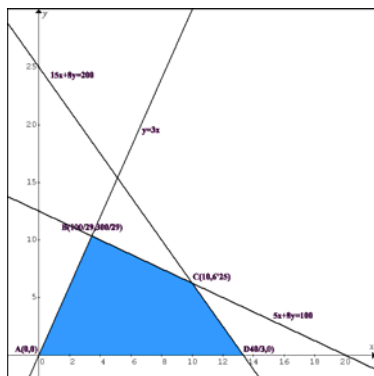
$$0'75x + 0'4y \leq 10 \Leftrightarrow 15x + 8y \leq 200$$

$$y \leq 3x$$

Establecemos la función objetivo lineal que deberemos maximizar o minimizar.

$$B(x, y) = 1000x + 1500y$$

Realizamos una representación gráfica del sistema de desigualdades, determinando el denominado conjunto o región factible y los vértices de este conjunto.



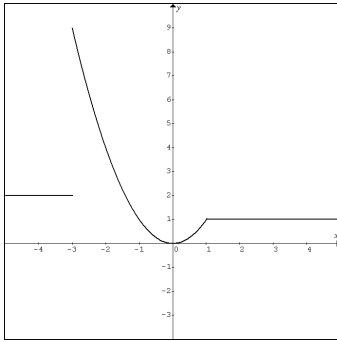
Buscamos la solución óptima e interpretamos los resultados. Construimos esta tabla:

Vértice	Función objetivo $B(x, y) = 1000x + 1500y$
A(0,0)	0
B(100/29, 300/29)	18966 (aproximadamente)
C(10, 6'25)	19375
D(40/3, 0)	13333 (aproximadamente)

La **solución óptima** es: 10 Tm del abono A y 6'25 Tm del abono B. El ingreso es 19375 €.

**Problema 3.**

a) Si dibujamos la gráfica de la función f, tendremos:



f es continua en el intervalo  $]-\infty, -3[$  por ser polinómica.

f es continua en el intervalo  $]-3, 1[$  por ser polinómica.

f es continua en el intervalo  $]1, \infty[$  por ser polinómica.

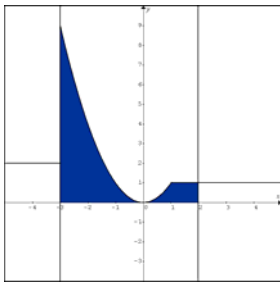
f es discontinua en  $x = -3$ , porque:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} 2 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} x^2 = 9$$

f es continua en  $x = 1$ , porque:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

b) Como  $f(x) \geq 0$  en el intervalo  $]-3, 2[$ , el área que nos piden, S, coincide con  $\int_{-3}^2 f(x)$ .



$$S = \int_{-3}^2 f(x) = \int_{-3}^{-1} f(x) + \int_{-1}^1 f(x) + \int_1^2 f(x) = \int_{-3}^{-1} 2 + \int_{-1}^1 x^2 + \int_1^2 1 =$$

$$\left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1 + [x]_1^2 = \left( \frac{1}{3} + \frac{27}{3} \right) + (2 - 1) = \frac{25}{3} \text{ us}$$

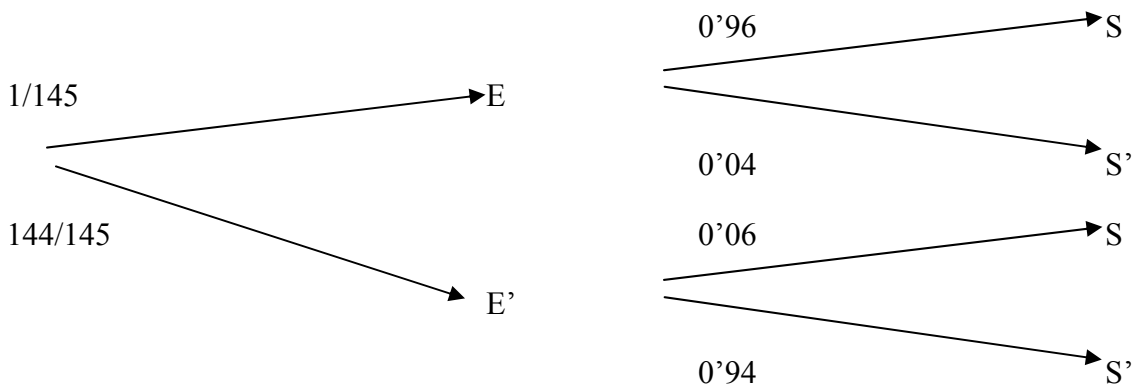
**Problema 4.**

Tenemos la siguiente información:

E: “Está enferma”,  $P(E) = 1/145$

S: “El test da positivo”,  $P(S/E) = 0'96$ ,  $P(S'/E') = 0'94$

Con la información que nos dan lo más cómodo es construir un diagrama de probabilidad como éste:



Nos piden:

a)  $P(S) = P(E \cap S) + P(E' \cap S) = P(E) \cdot P(S/E) + P(E') \cdot P(S/E') = 1/145 \cdot 0'96 + 144/145 \cdot 0'06 = 0'046..$

b)  $P(E/S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = \frac{1/145 \cdot 0'96}{0'046} = \frac{0'007}{0'046} \cong 0'14$

c)  $P(S' \cap E') = P(E' \cap S') = P(E') \cdot P(S'/E') = 144/145 \cdot 0'94 = 0'933...$

**EJERCICIO B. 2007J**

**Problema 1.**

Codificamos las incógnitas:

x: nº de coches del modelo barato

y: nº de coches del modelo medio

z: nº de coches del modelo caro

Codificamos la información mediante un sistema de ecuaciones:

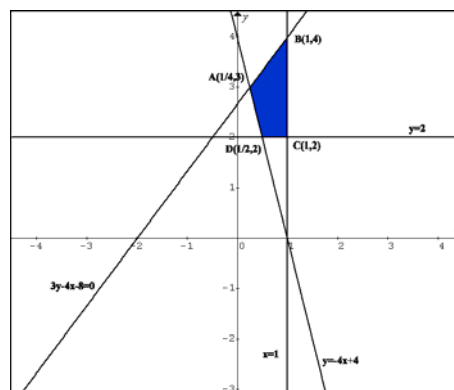
$$\begin{cases} 120000x + 15000y + 22000z = 1265000 \\ x = y + z \\ z = y/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 15y + 22z = 1265 \\ x - y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones mediante el método matricial de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 12 & 15 & 22 & 1265 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 27 & 34 & 1265 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 115 & 1265 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 44 \\ y = 33 \\ z = 11 \end{cases}$$

**Problema 2.**

Realizamos una representación gráfica del sistema de desigualdades, determinando el denominado conjunto o región factible y los vértices de este conjunto.



Buscamos la solución óptima e interpretamos los resultados.

Construimos esta tabla:

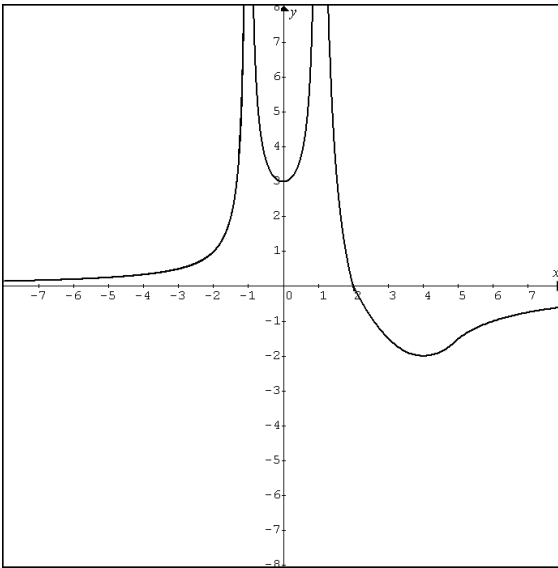
Vértice	Función objetivo $f(x, y) = 3x - y$
A(1/4,3)	-9/4
B(1,4)	-1
C(1,2)	1
D(1/2,2)	-1/2

El **valor mínimo** es: -9/4 y se alcanza en el punto (1/4,3).

### Problema 3.

Es una pregunta abierta y cada persona puede construir una función que cumpla las características que se mencionan. No es fácil encontrar la fórmula de una función que las cumpla todas.

No obstante, la gráfica de una función como la pedida podría ser:



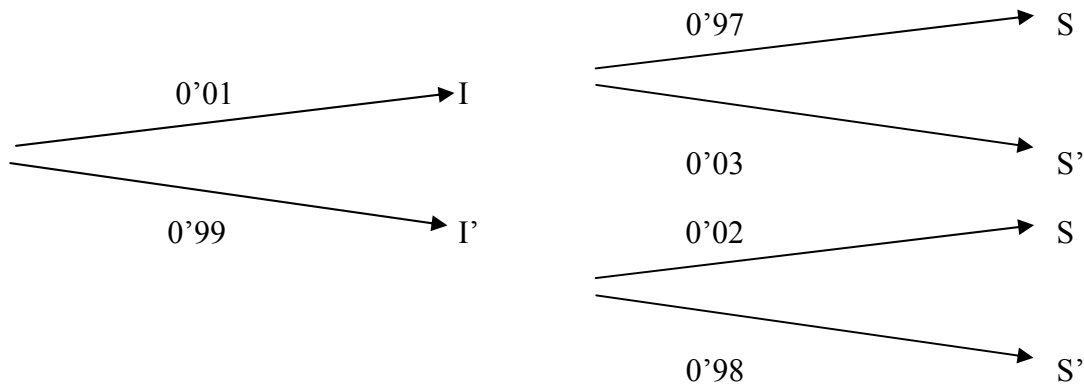
### Problema 4.

Tenemos la siguiente información:

I: "Hay un incidente",  $P(I) = 0.1$

S: "La alarma suena",  $P(S/I) = 0.97$ ,  $P(S/I') = 0.02$

Debido a la información que nos dan, resolver el problema mediante una tabla de contingencia no es muy aconsejable, por lo que podemos construir un diagrama de probabilidad como éste:



Nos piden:

a)  $P(S') = P(I \cap S') + P(I' \cap S') = P(I) \cdot P(S'/I) + P(I') \cdot P(S'/I') = 0.1 \cdot 0.03 + 0.99 \cdot 0.98 = 0.9705$

$P(S) = 0.0295$

b)  $P(I'/S) = \frac{P(I' \cap S)}{P(S)} = \frac{0.99 \cdot 0.02}{0.0295} = \frac{0.0198}{0.0295} \cong 0.67$

**Problema 1.**

Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave Enterprise. Cada gramo del complemento A contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento B contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos.

**Problema 2.**

Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$$3x + y \leq 12, \quad x - 2y \geq -3, y \geq \frac{x}{2} - 2, \quad 2x + 3y \geq 1.$$

Calcula los puntos de la región donde la función  $f(x,y) = 3x - 2y$  alcanza los valores máximo y mínimo y determina éstos.

**Problema 3.**

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 6x + 12 & 2 \leq x \leq 4 \\ -2x + a & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

Halla el valor de  $a$  para que la función  $y = f(x)$  sea continua en el intervalo  $[0,8]$ .

Halla los máximos y mínimos absolutos de  $y = f(x)$  en el intervalo  $[0,4]$ . Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.

Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  y la gráfica de la función  $y = f(x)$ .

**Problema 4.**

Se sabe que  $p(A) = 0,4$ ,  $p(B) = 0,6$  y  $p(A \cup B) = 0,7$ .

¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Calcula  $p(A \cap \bar{B})$ , donde  $\bar{B}$  representa el suceso contrario o complementario del suceso B.

Calcula  $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

**Problema 1.**

Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & +y & +z = -1 \\ 2x & -y & +z = 0 \\ -2x & +7y & +z = -4 \end{array} \right\}$$

**Problema 2.**

Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x - 3}$  se pide:

Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Máximos y mínimos locales.

Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

**Problema 3.**

Dada la función  $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$ :

Calcula los máximos y mínimos locales. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos locales.

Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función  $y = f(x)$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 0$  y  $x = 5$ .

**Problema 4.**

De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace 2 dianas de cada 3 disparos y el otro consigue 3 dianas de cada 4 disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

La probabilidad de que los dos acierten.

La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

La probabilidad de que ninguno acierte.

La probabilidad de que alguno acierte.

Suma las probabilidades de a), b) y c), justificando la suma obtenida.

# RESOLUCIÓN

## EJERCICIO A. 2007S

### Problema 1.

Codificamos las incógnitas.

$x$ : nº de gramos del complemento A,  $y$ : nº de gramos del complemento B

Codificamos la información mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 3x + y = 16 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ 3x + y = 16 & (2) \\ x + 2y = 7 & (3) \end{cases}$$

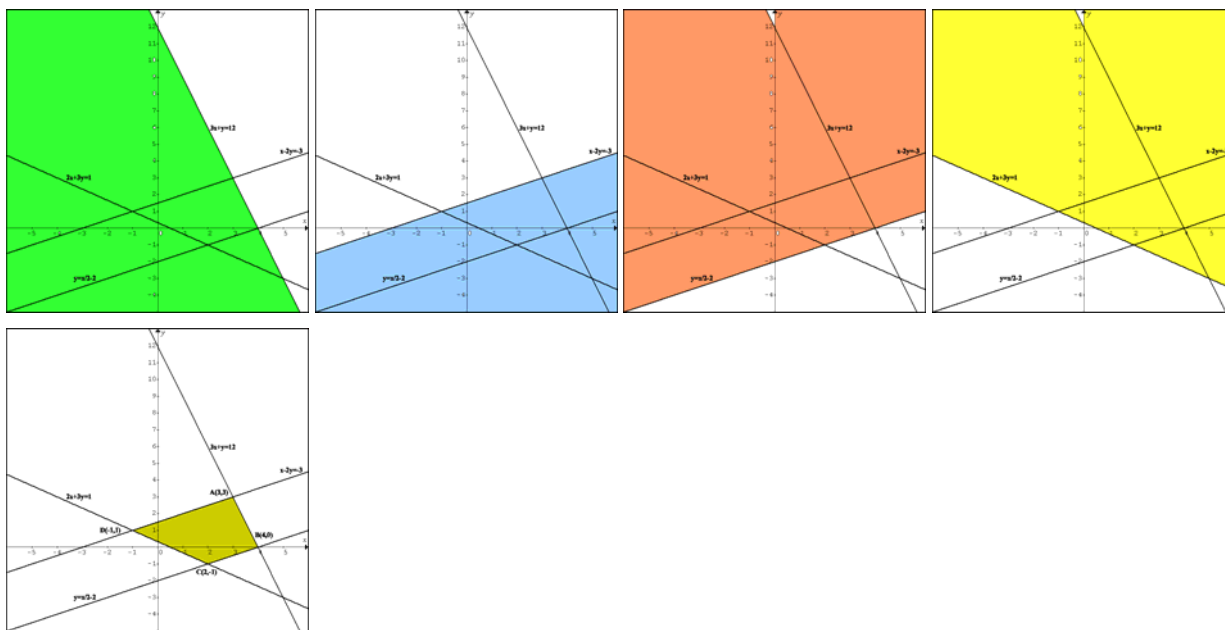
Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$(3) - (1): y = 1 \Rightarrow x = 5$$

Solución: Se necesitan 5 gramos del complemento A y 1 gramo del complemento B,

### Problema 2.

Realizamos una representación gráfica del sistema de desigualdades, determinando el denominado conjunto o región factible y los vértices de este conjunto.



Las soluciones óptimas están entre los vértices de la región; por tanto, construimos esta tabla:

Vértice	Función objetivo $f(x, y) = 3x - 2y$
A(3,3)	3
B(4,0)	12
C(2,-1)	8
D(-1,1)	5

El **valor mínimo** es 3 y se alcanza en el punto (3,3); el **valor máximo** es 12 y se alcanza en el punto (4,0).

### Problema 3.

$f$  es continua en el intervalo  $[0,2[$  por ser polinómica.

$f$  es continua en el intervalo  $[2,4]$  por ser polinómica.

$f$  es continua en el intervalo  $]4,8]$  por ser polinómica.

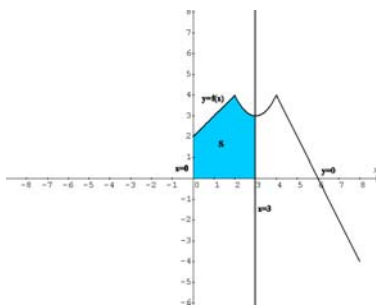
Como  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 = f(2)$ , para que sea continua en  $[0, 8]$  sólo faltaría que fuese continua también en  $x=4$ .

Para ello debe cumplirse:  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \Rightarrow 4 = -8 + a \Rightarrow a = 12$

El máximo absoluto de  $y = f(x)$  en el intervalo  $[0,4]$  es 4 y se encuentra en los puntos  $(2,4)$  y  $(4,4)$ .  
El mínimo absoluto de  $y = f(x)$  en el intervalo  $[0,4]$  es 2 y se encuentra en el punto  $(0,2)$ .

Se puede observar con claridad en la gráfica,

En la región del plano cuya área nos piden,  $f(x) \geq 0$ , por lo que:



$$S = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_0^2 (x+2) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 12) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x \right]_2^3 = 6 + \left( 18 - \frac{44}{3} \right) = \frac{28}{3}$$

### Problema 4.

Sabemos que  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0'7 = 0'4 + 0'6 - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = 0'3$

Los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes si  $p(B) = p(B/A)$ . Como  $p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0'3}{0'4} = 0'75$ , no coincide con  $p(B)$ , por lo que son dependientes.

Mediante un esquema gráfico, puedes ver que:  $p(A \cap \bar{B}) = 0'1$ . O como  $p(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 0'25$  también  $p(A \cap \bar{B}) = p(\bar{B}/A) \cdot p(A) = 0'25 \cdot 0'4 = 0'1$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'7 = 0'3$$

**Problema 1.**

Si empleamos el método matricial de Gauss, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

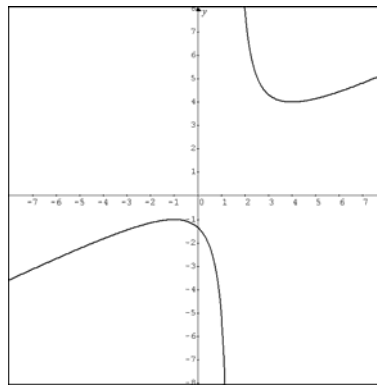
Tenemos un sistema compatible, pero indeterminado.

Si llamamos a  $y = t$ ,  $z = -3t - 2$ ,  $x = -1 - y - z = -1 - t - (-3t - 2) = 2t + 1$ .

La solución es  $S = \{(2t+1, t, -3t-2) \forall t \in \mathbb{R}\}$

**Problema 2.**

Si dibujamos la gráfica, tendremos:



Dominio =  $\mathbb{R} - \{3/2\}$ . No corta al eje OX ya que  $x^2 + 4 \neq 0$ . Corta al eje OY en el punto  $(0, -4/3)$ .

Su asíntota vertical es  $x = 3/2$ . No tiene asíntotas horizontales, ya que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{2x - 3} = \infty$ .

Sabemos que en los máximos y mínimos locales,  $y' = 0$

$$y' = \frac{2x \cdot (2x - 3) - (x^2 + 4) \cdot 2}{(2x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 8}{(2x - 3)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4 \text{ (Posibles extremos relativos)}$$

x	-2	-1	0	3/2	3	4	5
y'	12/40	0	-8/9	No existe	-8/9	0	12/49
y		Máximo		No existe		Mínimo	

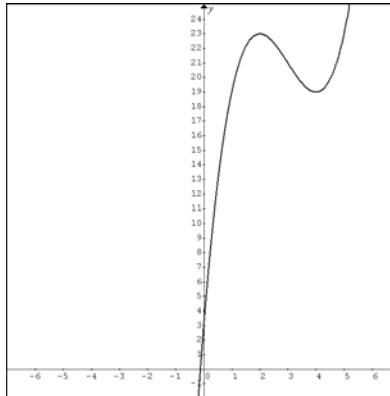
Crece en los intervalos  $]-\infty, -1[$  y  $]4, +\infty[$

Decrece en los intervalos  $]-1, 3/2[$  y  $]3/2, 4[$

Máximo en  $(-1, -1)$  y mínimo en  $(4, 4)$

### Problema 3.

Si dibujamos la gráfica, tendremos:

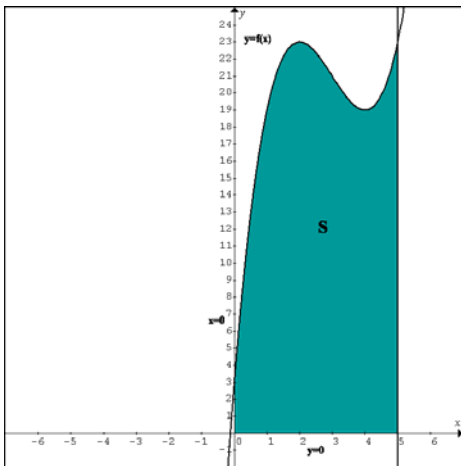


Sabemos que en los máximos y mínimos locales,  $y' = 0$ ,  $y'' \neq 0$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 4 \text{ (Posibles extremos relativos)}$$

$$y'' = 6x - 18; y''(2) < 0 \Rightarrow \text{En } (2, 23) \text{ hay un máximo. } y''(4) > 0 \Rightarrow \text{En } (4, 19) \text{ hay un mínimo.}$$

En la región del plano cuya área nos piden,  $f(x) \geq 0$ , por lo que:



$$S = \int_0^5 f(x) = \int_0^5 (x^3 - 9x^2 + 24x + 3) = \left[ \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 3x \right]_0^5 = \frac{625}{4} - 375 + 300 + 15 = \frac{385}{4} \text{ uds}$$

### Problema 4.

Consideramos los sucesos independientes:

A: El primer tirador hace diana y B: El segundo tirador hace diana

Tendremos, por tanto:  $p(A) = 2/3$ ,  $p(B) = 3/4$

Nos piden  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 2/3 \cdot 3/4 = 6/12 = 1/2$ . (Ya que son sucesos independientes)

Nos piden  $p[(A' \cap B) \cup (A \cap B')] = p(A' \cap B) + p(A \cap B') = p(A) \cdot p(B') + p(A') \cdot p(B) = 5/12$ .

Nos piden  $p(A' \cap B') = p(A') \cdot p(B') = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$ .

Nos piden  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 11/12$ . También  $p(A \cup B) = 1 - p(A' \cap B')$

La suma las probabilidades de a), b) y c) es 1, lo cual es lógico ya que la unión de los sucesos nos da el suceso seguro.

**Problema 1.**

Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2.000 euros, 4.000 euros por una en la urbanización B y 6.000 por una en la urbanización C. Se sabe que se han vendido un 50% más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por las ventas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las ventas en las urbanizaciones A y B.

**Problema 2.**

Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 5 \\ x - 2y \geq -1 \\ 5x + 4y \leq 16 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$

Determina los vértices de la región obtenida en el apartado anterior.

Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función  $f(x,y) = 3x - y$  en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

**Problema 3.**

Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  en el intervalo  $[1,4]$ . Justifica que los puntos encontrados son máximos o mínimos absolutos.

Estudia la continuidad en el intervalo  $[0,4]$  de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

**Problema 4.**

Dados dos sucesos A y B, sabemos que  $p(A \cap B) = 0,1$ ,  $p(A \cup B) = 0,7$  y  $p(A/B) = 0,2$ .

Calcula  $p(A)$  y  $p(B)$ .

¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Calcula  $p(\overline{A} \cup B)$ , donde  $\overline{A}$  representa el suceso complementario o contrario de A.

**Problema 1.**

Determina la matriz  $X$  que verifica la ecuación  $AX + I = AB^t$ , siendo  $I$  la matriz identidad,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B^t$  la transpuesta de la matriz  $B$ .

**Problema 2.**

Dada la función  $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ , determina:

Domínio y puntos de corte con los ejes coordenados.

Ecuación de sus asíntotas.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Máximos y mínimos relativos.

Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

**Problema 3.**

El coste de fabricación en euros de  $x$  unidades de un artículo viene dado por la función  $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$ .

¿Cuál es la función que determina el coste de fabricación unitario?

¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario? ¿Cuánto vale éste? Justifica que es mínimo.

**Problema 4.**

El 60% de los alumnos de cierta asignatura aprueba en junio. El 80% de los presentados en septiembre también aprueba la asignatura. Sabiendo que los alumnos que se presentaron en septiembre son todos los que no aprobaron en junio, determina:

La probabilidad de que un alumno seleccionado al azar haya aprobado la asignatura.

Si sabemos que un estudiante ha aprobado la asignatura, la probabilidad de que haya sido en junio.

## RESOLUCIÓN

### EJERCICIO A. 2008J

#### Problema 1.

Codificamos las incógnitas:

x: nº de plazas del garaje A, y: nº de plazas del garaje B, z: nº de plazas del garaje C

Codificamos la información mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ 6000z = 2000x + 4000y \\ x = 15z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 65 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

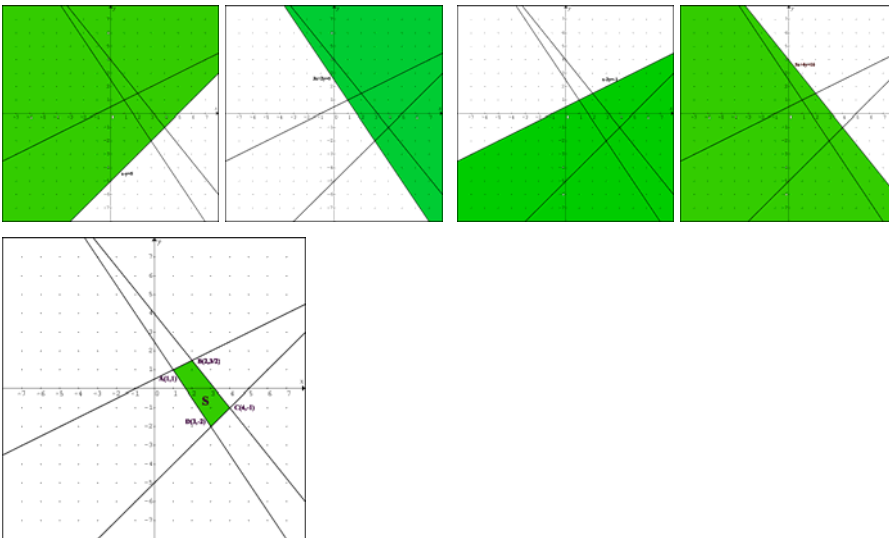
Resolvemos el sistema de ecuaciones mediante el método matricial de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 1 & -4 & -65 \\ 0 & -2 & -5 & -130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 1 & -4 & -65 \\ 0 & 0 & -13 & -260 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \\ z = 20 \end{cases}$$

Solución: Se han vendido 30 de plazas de garaje en la urbanización A, 15 en la urbanización B y 20 en la urbanización C

#### Problema 2.

El conjunto solución está representado por el conjunto S:



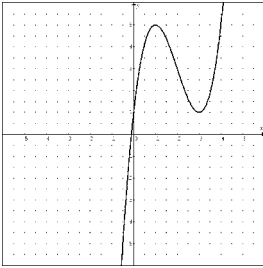
Los vértices de la región y los valores que alcanza la función son:

Vértice	Función objetivo $f(x, y) = 3x - y$
A(1,1)	2
B(2,3/2)	9/2
C(4,-1)	13
D(3,-2)	17

El punto donde alcanza el mínimo la función es A(1,1) y el valor mínimo es 2.

**Problema 3.**

Aquí tenemos la gráfica de la función  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  en el intervalo  $[1,4]$ .



El máximo absoluto lo encontramos para  $x = 4$  y es 5.

El mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo y lo encontramos para  $x = 3$  y es 1.

Vamos a comprobar que en  $x = 3$  se encuentra el mínimo relativo.

$$\text{En los extremos relativos } y' = 0: 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

En los mínimos relativos, además  $y'' > 0: 6x - 12 \underset{(x=3)}{=} 6 \Rightarrow$  En  $x = 3$  hay un mínimo.

Vamos a hacer un análisis gráfico y analítico de la continuidad de la función.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

	<p>Es continua en el intervalo <math>[0,1[</math> por ser polinómica.</p> <p>Es continua en el intervalo <math>]1,4]</math> por ser polinómica.</p> <p>En <math>x = 1</math>:</p> $f(1) = 5$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 3) = 5$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) = 5$
<p>Es continua en el intervalo <math>[0,4]</math></p>	<p>Es continua en el intervalo <math>[0,4]</math></p>

**Problema 4.**

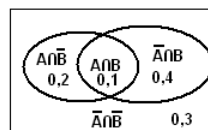
Como sabemos que  $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow 0,2 = \frac{0,1}{p(B)} \Rightarrow p(B) = 0,5$

También  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0,7 = p(A) + 0,5 - 0,1 \Rightarrow p(A) = 0,3$

Para que los sucesos A y B sean independientes, se ha de cumplir:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Como  $P(A \cap B) = 0,1$  y  $P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 \Rightarrow$  Son dependientes.

Para calcular  $p(\overline{A} \cup B)$ , observamos este diagrama:



Por tanto  $p(\overline{A} \cup B) = 0,3 + 0,4 + 0,1 = 0,8$

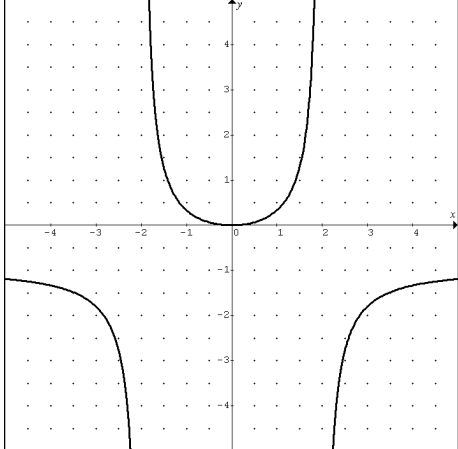
**Problema 1.**

Si realizamos transformaciones, tendremos:

$$AX + I = AB^t \Rightarrow A^{-1} \cdot AX + A^{-1} \cdot I = A^{-1} \cdot AB^t \Rightarrow X + A^{-1} = B^t \Rightarrow X = B^t - A^{-1}$$

$$\text{Por tanto } X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**Problema 2.**

Función	Gráfica
$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$	

Dominio:  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ . Puntos de corte con los ejes coordenados: (0,0)

Ecuación de sus asíntotas verticales:  $x = -2, x = 2$ . Ecuación de su asíntota horizontal:  $y = -1$

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, buscaremos en primer lugar los máximos y mínimos relativos.

$$\text{En los e.r. } y' = 0: y' = \frac{2x(4 - x^2) - x^2(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x}{(4 - x^2)^2}; \text{ por tanto } y' = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (posible e.r.)}$$

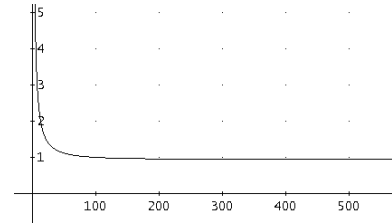
x	$]-\infty, -2[$	$]-2, 0[$	$x = 0$	$]0, 2[$	$]2, \infty[$
$y'$	-	-	0	+	+
y	Decreciente	Decreciente	Mínimo	Creciente	Creciente

### Problema 3.

La función que determina el coste de fabricación unitario será  $g(x) = f(x) / x$ ; es decir:

$$g(x) = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{20}{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{20}{x}$$

Si dibujamos la gráfica de la función  $g$ , observamos que “aparentemente” es siempre decreciente, pero es conveniente hacer un estudio más riguroso.



Para buscar el posible mínimo: Debe ser  $g'(x) = 0$ .

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{20}{x^2}; g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{20}{x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 400$$

Para asegurar que es un mínimo:

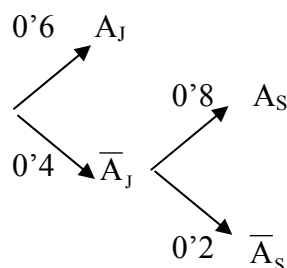
$$g''(x) = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt{x^5}} + \frac{40}{x^3} \Rightarrow g''(400) = \frac{1}{6400000} > 0$$

Por tanto, produciendo 400 unidades se consigue el coste unitario mínimo que es  $g(400) = 0,95$  euros por unidad producida.

Lo que sí se puede ver también es que  $g(x)$  tiende a 1 cuando  $x$  toma valores cada vez más grandes, pero matemáticamente nunca llegará a valer 1

### Problema 4.

Con los sucesos  $A_J$ : Aprobar en junio y  $A_S$ : Aprobar en septiembre y los datos disponibles se puede construir el árbol de probabilidades que sigue:



$$P(\text{Aprobar}) = P(A_J) + P(A_S) = 0,6 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,92$$

$$P(A_J / \text{Aprobar}) = \frac{P(A_J \cap \text{Aprobar})}{P(\text{Aprobar})} = \frac{P(A_J)}{P(\text{Aprobar})} = \frac{0,6}{0,92} = 0,6522$$

**Problema 1.**

Antonio ha conseguido 1372 euros trabajando durante las vacaciones. Ese dinero puede gastarlo íntegramente comprando un ordenador portátil, una cámara digital y haciendo un viaje. El precio del ordenador portátil excede en 140 euros a la suma de los precios de la cámara y del viaje. Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad que el precio inicial, Antonio podría invitar a su hermano al viaje en el caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 euros. Calcula los precios del ordenador, de la cámara y del viaje.

**Problema 2.**

Dada la función  $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ , determina:

Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Máximos y mínimos locales.

Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

**Problema 3.**

Obtén los parámetros  $r$ ,  $s$  y  $t$  para que la función  $f(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$  tenga un máximo en  $x = -2$ , un mínimo en  $x = 0$  y pase por el punto  $(1, -1)$ .

**Problema 4.**

Una empresa automovilística fabrica su modelo Assegurat en cuatro factorías distintas, A, B, C y D. La factoría A produce el 40% de los coches de este modelo con un 5% de defectuosos, la B produce el 30% con un 4% de defectuosos, la C el 20% con un 3% de defectuosos y, por último, la factoría D el 10% restante con un 2% de defectuosos. Si elegimos un coche del modelo Assegurat al azar, calcula:

La probabilidad de que sea defectuoso.

Si no es defectuoso, la probabilidad de que haya sido fabricado en la factoría C.

**Problema 1.**

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Halla su inversa.

Resuelve la ecuación  $X A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$

**Problema 2.**

Cierto armador se dedica a la pesca de rape y merluza. Las cuotas pesqueras imponen que sus capturas totales no excedan las 30 toneladas (Tm). Por otro lado, la cantidad de rape como máximo puede triplicar a la de merluza y, además, esta última no puede superar las 18 Tm. Si el precio del rape es de 15 €/kg y el de la merluza 10 €/kg, ¿qué cantidades de cada especie debe pescar para maximizar sus ingresos?

**Problema 3.**

La cuenta de resultados (pérdidas o ganancias) en millones de euros,  $y$ , de una empresa vienen dadas por la siguiente función de los años de existencia  $x$  de la misma:

$$y = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}$$

¿A partir de qué año deja la empresa de tener pérdidas?

¿En qué momento alcanza la empresa sus ganancias máximas? ¿A cuánto ascienden éstas?

Describe la evolución de la cuenta de resultados de la empresa. ¿Cuáles serán sus beneficios a muy largo plazo?

**Problema 4.**

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos aleatorios tales que  $P(A)=0,7$ ,  $P(B)=0,2$  y  $P(A/B)=1$ .

Calcula las probabilidades siguientes:  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \cup B)$  y  $P(B/A)$ .

¿Son los sucesos  $A$  y  $B$  independientes?

# RESOLUCIÓN

## EJERCICIO A. 2008S

### Problema 1.

Codificamos las incógnitas:

x: precio del portátil, y: precio de la cámara, z: precio del viaje

Codificamos la información mediante un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1372 \\ x - 140 = y + z \\ x + 15z = 1164 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1372 \\ x - y - z = 140 \\ 2x + 3z = 2328 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones mediante el método matricial de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 1 & -1 & -1 & 140 \\ 2 & 0 & 3 & 2328 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 0 & -2 & -2 & -1232 \\ 0 & 2 & 5 & 2048 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 0 & 1 & 1 & 616 \\ 0 & 0 & 3 & 816 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 756 \\ y = 344 \\ z = 272 \end{cases}$$

Solución: El precio del ordenador es 756€, el de la cámara 344€ y el del viaje 272€

### Problema 2.

Función	Gráfica
$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$	

Dominio:  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ . Puntos de corte con los ejes coordenados: (0,0)

Ecuación de sus asíntotas verticales:  $x = -1$ ,  $x = 1$ . Ya que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

No hay asíntotas horizontales porque  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, buscaremos en primer lugar los máximos y mínimos relativos.

En los extremos relativos  $y' = 0$ :  $y' = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$ ; por tanto:

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$  (posibles e.r)

x	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3}, -1[$	$]-1, 0[$	0	$]0, 1[$	$]1, \sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$] \sqrt{3}, \infty[$
y'	-	0	+	+	0	+	+	0	-
y	Decreciente	Mínimo	Creciente	Creciente	Crec.	Creciente	Creciente	Máximo	Decreciente

**Problema 3.**

Al hablarnos de máximos y mínimos, necesitamos conocer la derivada de la función:

$$f(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2rx + s$$

Si f pasa por (1,-1):  $-1 = 1 + r + s + t$

Si tiene un mínimo en  $x = 0$ :  $f'(0) = 0 \Rightarrow s = 0$

Si tiene un máximo en  $x = -2$ :  $f'(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4r = 0 \Rightarrow r = 3$

Si sustituimos en la primera ecuación:  $t = -5$

**Problema 4.**

Vamos a construir una tabla de contingencia con los siguientes sucesos:

A: Ser de la fábrica A,      B: Ser de la fábrica B, C: Ser de la fábrica C,      D: Ser de la fábrica C

M: Ser defectuosa,      M': No ser defectuosa,

	A	B	C	D	Totales
M	20	12	6	2	40
M'	380	280	194	98	960
Totales	400	300	200	100	1000

Nos piden  $P(M) = \frac{40}{1000} = 0'04 = 4\%$

Nos piden  $P(C/M') = \frac{P(C \cap M')}{P(M')} = \frac{194/1000}{960/1000} = \frac{194}{960} \cong 20'2\%$

**Problema 1.**

La inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  es  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/10 \\ 2/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

$$X A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} \Rightarrow X B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -10 & -30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -10 & -30 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -10 & -30 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA:  $A^2 = B = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/25 & -9/100 \\ -3/25 & 13/100 \end{pmatrix}$

**Problema 2.**

Identificamos las variables del problema:  $x$ : nº de Tm de rape,  $y$ : nº de Tm de merluza

Expresamos las restricciones o limitaciones que da el problema, mediante un sistema de desigualdades.

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$x + y \leq 30$$

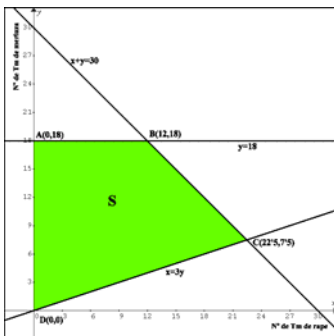
$$x \leq 3y$$

$$y \leq 18$$

Establecemos la función objetivo lineal que deberemos maximizar o minimizar.

$$B(x, y) = 15x + 10y$$

Realizamos una representación gráfica del sistema de desigualdades, determinando el denominado conjunto o región factible y los vértices de este conjunto.

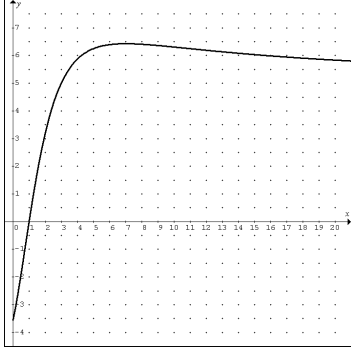


Buscamos la solución óptima e interpretamos los resultados. Construimos esta tabla:

Vértice	Función objetivo $B(x, y) = 15x + 10y$
A(0,18)	180
B(12,18)	360
C(22'5,7'5)	412'5
D(0,0)	0

La **solución óptima** es: 22'5 Tm de rape y 7'5 Tm de merluza. El ingreso es 412'5 €.

### Problema 3.

Función	Gráfica
$f(x) = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}$	

La empresa de tener pérdidas a partir de  $x = 1$ . De hecho  $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -5$

Nos piden el máximo relativo de la función.

$$\text{En los e.r. } y' = 0: y' = \frac{(10x + 20)(x^2 + 7) - (5x^2 + 20x - 25) \cdot 2x}{(x^2 + 7)^2} = \frac{-20x^2 + 120x + 140}{(x^2 + 7)^2};$$

por tanto:  $y' = 0 \Rightarrow -20x^2 + 120x + 140 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 7$  (Posibles extremos relativos)

Para comprobar si en  $x = 7$  hay un máximo relativo:

x	]0,7[	x = 7	]7,∞[
y'	+	0	-
y	Creciente	Máximo	Decreciente

A los 7 años alcanza sus ganancias máximas que son de  $f(7) = 6'428$  millones de euros

Para saber cuáles serán sus beneficios a muy largo plazo, hallamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$$

### Problema 4.

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que  $P(A)=0,7$ ,  $P(B)=0,2$  y  $P(A/B)=1$ .

$$\text{Si } P(A/B) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,2 - 0,2 = 0,7$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes, se ha de cumplir:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Como  $P(A \cap B) = 0,2$  y  $P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14 \Rightarrow$  Son dependientes.