EXAMEN: Recuperación 1ª evaluación MATEMÁTICAS I	CURSO: 1 BCT CEED
Soluciones	

1. Un negocio en el que invertimos 10000 € pierde un 4% mensual.

a) Completa la siguiente tabla, que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos:

t (meses)	0	1	2	···	10	···	t
C (€)	10000						

b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que dicho capital se reduzca a la mitad?

Solución.

a) Ya que el negocio pierde un 4% mensual, cuando pase un mes, cada 100 €, pasarán a ser 96 €, y por lo tanto, cada euro pasará a ser 0'96 € (basta con dividir entre 100).

Si sabemos lo que le ocurre a 1 €, ya podemos saber qué ocurrirá con cualquier cantidad. Así por ejemplo:

Si 1 € pasa a ser 0'96 € , 2€ pasarán a ser: $2 \cdot 0'96 = 1'92$ €
3€ pasarán a ser: $3 \cdot 0'96 = 2'88$ €

Y una cantidad cualquiera, C € pasarán a ser $C \cdot 0'96$ €.

Por lo tanto, como nosotros partimos de 10000 €,

Al pasar 1 mes, tendremos $10000 \cdot 0,96 = 9600$ €

¡ojo!, después de que haya pasado 1 mes, ya no tenemos 10000 €, sino 9600 €, por lo que al pasar el segundo mes, tendremos $9600 \cdot 0'96 = 9216$ €.

Fíjate que, puesto que $9600 = 10000 \cdot 0'96$, también podemos calcular lo que tenemos al pasar el segundo mes como

$$10000 \cdot 0'96 \cdot 0'96 = 10000 \cdot 0'96^2 = 9216 \text{ €}$$

Al pasar el tercer mes, tendremos $9216 \cdot 0'96 = 8847'36$ €

O lo que es lo mismo:

$$10000 \cdot 0'96^2 \cdot 0'96 = 10000 \cdot 0'96^3 = 8847'36 \text{ €}$$

Ya podemos observar una cierta regularidad en los cálculos: para obtener el dinero al pasar un mes, tenemos que multiplicar el dinero que teníamos el mes anterior por 0'96, lo que nos permite rellenar la tabla:

t (meses)	0	1	**2**	···	**10**	···	**t**
C (€)	10000	$10000 \cdot 0'96$	$10000 \cdot 0'96^2$		$10000 \cdot 0'96^{10}$		$10000 \cdot 0'96^t$

Y si efectuamos las operaciones, podemos dar la tabla con sus resultados:

t (meses)	0	1	2	···	10	···	t

C (€)	10000	9600	9216		6648'33		$10000\cdot 0'96^t$

b) De acuerdo con la última columna de la tabla, el dinero que tendremos cuando hayan pasado t meses, será:

$$C(t)=10000\cdot 0'96^t$$

Si queremos averiguar cuánto tiempo tiene que pasar para que se reduzca a la mitad, tendrá que ser C(t)=5000, es decir:

$$5000=10000\cdot 0'96^t \Rightarrow 0'96^t=\frac{5000}{10000}=0'5.$$

O sea, hay que resolver ***la ecuación exponencial:*** $0'96^t=0'5$.

Para ello, tenemos que calcular la incógnita, t, que está en el exponente, y por lo tanto hemos de tomar logaritmos, ya que una de las propiedades de los logaritmos dice que:

$$\log_a x^{\mathbf{n}}=\mathbf{n}\cdot \log_a x$$

Si lo observas, el exponente de la *x* ha pasado a multiplicar. Y la base que elegimos de los logaritmos es la base diez (logaritmos decimales), ya que este tipo de logaritmos podemos obtenerlos con ayuda de la calculadora:

Así pues, en la ecuación $0'96^t=0'5$, tomamos logaritmos decimales, es decir:

$$0'96^t=0'5 \Rightarrow \log 0'96^t=\log 0'5 \Rightarrow t\cdot \log 0'96=\log 0'5 \Rightarrow -0'017729t=-0'301030$$

(Con la calculadora hemos obtenido $\log 0'96=-0'017729$ y $\log 0'5=-0'301030$).

Por lo tanto:

$$t=\frac{-0'301030}{-0'017729}=16'98 \text{ meses, aproximadamente.}$$

Respuesta: Para que el dinero se reduzca a la mitad tienen que pasar unos 17 meses, aproximadamente.

2. Una peña deportiva contrató un autobús para seguir a su equipo. Si el autobús se hubiera llenado, cada uno habría pagado 5'10 €; pero quedaron 3 plazas vacías y el viaje costó 5'40 €. ¿Cuántas plazas tenía el autobús?

Solución.

1) Elección de incógnitas.

Sea p el número de plazas. No necesitamos más incógnitas.

2) Planteamiento de la ecuación.

Debemos buscar una frase en el enunciado donde se indique, o de donde se deduzca una igualdad. Está claro, que independientemente del número de viajeros que vayan en el autobús, el coste total del viaje siempre será el mismo, y que se obtendrá multiplicando el número de viajeros por lo que pague cada uno de ellos.

De acuerdo con el enunciado, si el autobús se hubiera llenado, cada uno habría pagado 5’1 €, luego el coste del viaje sería: p viajeros (que van) por 5’10 € que paga cada uno. O sea:

$$5'10p \quad (1)$$

Pero quedaron 3 plazas vacías, luego fueron p–3 viajeros, y cada uno de ellos pagó 5’4 €, por lo que el coste del viaje se obtendría ahora como:

$$5'4(p-3) \quad \textbf{(atención al paréntesis) (2)}$$

Como tanto (1) como (2) nos dan el precio total del viaje, tienen que ser iguales, es decir:

$$5'4(p-3)=5'1p$$

3) Resolución de la ecuación

$$5'4(p-3)=5'1p$$

1. Quitamos paréntesis: $5'4p-3\cdot 5'4=5'1p \Rightarrow 5'4p-16'2=5'1p$
2. Agrupamos p en un miembro (el primero en este caso), para lo que restamos 5’1p a los dos miembros y sumamos 16’2 a los dos miembros:

$$5'4p-5'1p=16'2 \Rightarrow 0'3p=16'2$$

3. Despejamos p. Para ello dividimos los dos miembros entre 0’3:

$$p=\frac{16'2}{0'3}=54 \text{ plazas}$$

4) Comprobamos la solución *<u>¡sobre el enunciado!</u>*

54 plazas a 5’1 € por plaza da un total de 275’4 € para el viaje. Si ahora dividimos los 275’4 € entre 51 viajeros que van, cada uno de ellos debe pagar $\frac{275'4}{51}=5'4$ €, que coincide con el enunciado. Luego la solución es correcta.

5) Respuesta.

El autobús tiene 54 plazas.

3. Dos coches parten al mismo tiempo de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección noroeste (forman un ángulo de π/4 radianes) . Uno de los coches coge la primera de ellas con una velocidad constante de 60 km/h y el otro coge la segunda con una velocidad constante de 80 km/h. ¿A qué distancia se encontrará uno del otro al cabo de 45 minutos?

Solución.

El coche que va a 60 km/h, hacia el norte, en 45 minutos, que son ¾ de hora, recorrerá

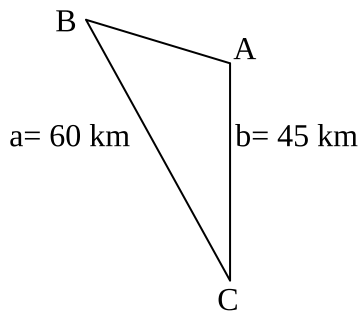
$$60\cdot 3/4 = 45 \text{ km}$$

El otro coche, que va a 80 km/h, hacia el noroeste, recorrerá

$$80\cdot 3/4 = 60 \text{ km}$$

El ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes equivale a $\frac{180^{\circ}}{4}=45^{\circ}$, ya que π radianes son 180º.

Un dibujo ilustrativo de la situación sería (no está a escala):



Tenemos que calcular el lado c, y sabemos que el ángulo C=45º. Puesto que nos dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, aplicamos el teorema del coseno:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2bc\cos C}=\sqrt{45^2+60^2-2\cdot 45\cdot 60\cdot \cos 45}=\sqrt{1806'62}=42'5 \text{ km}$$

Respuesta: Al cabo de ¾ de hora se encuentra a unos 42'5km uno del otro.

4.

a) Calcula los ceros del polinomio p(x)= $x^4-11x^3+28x^2$ y factoriza dicho polinomio,

b) Calcula el resto de la siguiente división $(x^4-5x^3+3x^2+2):(x+1)$ sin efectuarla.

Solución.

a) Podemos observar que x^2 es un factor común del polinomio, por lo que:

$$x^4-11x^3+28x^2=x^2(x^2-11x+28).$$

Ahora, tan solo nos queda por factorizar el polinomio de segundo grado de dentro del paréntesis: $x^2-11x+28$.

Puesto que es de segundo grado, podemos calcular sus ceros resolviendo la ecuación de segundo grado correspondiente:

$x^2-11x+28=0$, siendo a=1, b= –11 y c=28

Aplicamos la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 28}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{11\pm 3}{2}$$

lo que da lugar a dos soluciones:

$x_1=\frac{11+3}{2}=7$ ó $x_2=\frac{11-3}{2}=4$

Y por lo tanto $x^2-11x+28=(x-7)(x-4)$

Y el polinomio del enunciado, quedaría factorizado de la forma:

$$x^4-11x^3+28x^2=x^2(x-7)(x-4)$$

Los ceros de dicho polinomio se obtienen de igualar a cero:

$$x^4-11x^3+28x^2=x^2(x-7)(x-4)=0$$

Y como para que un producto dé cero, alguno de los factores tiene que dar cero (o todos ellos), los ceros de dicho polinomio serán aquellos para los que:

$x^2=0 \Rightarrow x=0$, doble.

$x-7=0 \Rightarrow x=7$

$x-4=0 \Rightarrow x=4$

Respuesta: Los ceros del polinomio son $x=0$, doble, $x=4$ ó $x=7$. Y su descomposición factorial es $x^4-11x^3+28x^2=x^2(x-7)(x-4)=0$

b) Puesto que el enunciado indica que no podemos efectuar la división, esto significa que no podemos aplicar la regla de Ruffini para obtener el resto. Lo que tenemos que hacer es aplicar el teorema del resto, que nos asegura que al dividir un polinomio, $p(x)$, entre $(x+a)$, el resto de la división coincide con el valor numérico del polinomio $p(x)$ al sustituir la x por $-a$ (atención al cambio de signo de a).

   En nuestro caso la división es $(x^4-5x^3+3x^2+2):(x+1)$ por lo que

   el polinomio $p(x)= x^4-5x^3+3x^2+2$

   $(x+a)$ es $(x+1)$, y por lo tanto $a= 1$

   Así pues, tenemos que sustituir la x por -1:

   $(-1)^4-5(-1)^3+3(-1)^2+2=1-5\cdot(-1)+3\cdot 1+2=1+5+3+2=11$

   Respuesta: El resto de dicha división es 11.

5.

a) Sabiendo que $\begin{cases} sen\alpha = 0'6 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases}$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α, sin calcular ninguno de los ángulos. ¿En qué cuadrante se encuentra el ángulo 2α?

b) El afijo de un número complejo es (–1,1). Exprésalo de todas las formas que hemos visto, indicando su nombre.

Solución.

a) El enunciado no nos permite calcular ningún ángulo. Por otra parte, α se encuentra en el segundo cuadrante, según se deduce del enunciado, ya que eso es lo que significa $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Pero no es esto lo que nos piden, sino dónde se encuentra el ángulo 2α. Para ello tenemos que obtener las razones trigonométricas de 2α (es decir, el seno, el coseno y la tangente de 2α). Para ello, utilizamos las fórmulas del ángulo doble:

$sen2\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha- sen^2\alpha$

$tg2\alpha=\frac{sen2\alpha}{\cos 2\alpha}$

Puesto que el único dato del enunciado es el $\text{sen}\alpha=0'6$, tenemos que calcular el $\cos\alpha$. Para ello:

1. Aplicamos la relación fundamental de trigonometría:

   $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow 0'6^2+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow 0'36+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-0'36 \Rightarrow \cos^2\alpha=0'64 \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{0'64}=\pm 0'8$

2. Elegimos el valor correcto para $\cos\alpha$

   Como α está en el segundo cuadrante, su coseno tiene que ser negativo, por lo que

$$\cos\alpha=-0'8$$

Así pues:

$$\text{sen}\alpha=0'6$$

$$\cos\alpha=-0'8$$

Y ya podemos aplicar las fórmulas del ángulo doble:

$$\text{sen}2\alpha=2\text{sen}\alpha\cos\alpha=2\cdot 0'6\cdot(-0'8)=-0'96$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=(-0'8)^2-0'6^2=0'64-0'36=0'28$$

$$\text{tg}2\alpha=\frac{\text{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{-0'96}{0'28}=-\frac{24}{7}$$

Y puesto que el $\text{sen}2\alpha$ es negativo y el $\cos 2\alpha$ es positivo, 2α se encuentra en el cuarto cuadrante.

Respuesta: 2α se encuentra en el cuarto cuadrante, $\text{sen}2\alpha=-0'96$ y $\cos 2\alpha=0'28$ y $\text{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$

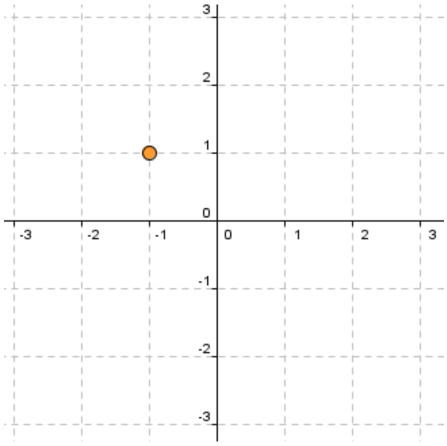
b) El afijo de un número complejo es el punto del plano complejo que lo representa. La primera coordenada es su parte real y la segunda coordenada su parte imaginaria. Por lo tanto:

Parte real = –1 Parte imaginaria=1

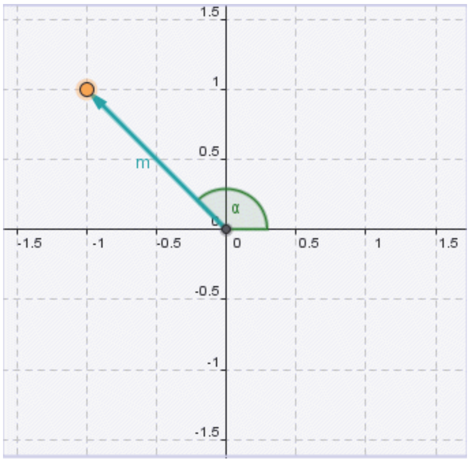
Y esto nos permite dar dicho número complejo, al que llamaremos z, en su ***forma binómica***:

$$z=-1+i$$

Su representación gráfica sería:



Para pasarlo a forma polar, tenemos que calcular su módulo, *m*, y su argumento, α, que representamos en el siguiente dibujo:



Para hallar el módulo, tenemos que utilizar el teorema de Pitágoras, ya que conocemos las coordenadas del punto, que son los catetos del triángulo rectángulo, y tenemos que calcular su hipotenusa, que es el módulo que buscamos. Así pues:

$$m=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Y para hallar el argumento, podemos elegir dos caminos:

1. El método general: utilizamos la tangente de α.

En efecto $\quad tg\alpha=\frac{-1}{1}=-1$ (parte imaginaria entre parte real)

α=arctg(–1)= –45 ó –45º+180º=135º (la tangente se repite cada 180º)

De los dos posibles valores del ángulo, hemos de elegir el que corresponda al cuadrante en el que se encuentra el afijo del número complejo, en este caso el segundo cuadrante, por lo tanto

$$\alpha=135º.$$

2. Camino rápido para casos sencillos como éste.

Puesto que el afijo se encuentra en la diagonal del segundo cuadrante, que forma un ángulo de 45º con el eje de ordenadas, el ángulo α será de

$$\alpha=90º+45º=135º.$$

Así pues, z en ***forma polar*** es $z=\sqrt{2}_{135º}$.

Y por último, dicho número complejo, en ***forma trigonométrica*** es:

$$z=\sqrt{2}\,(\cos 135+i\,\mathrm{sen}\,135)$$

Respuesta:

Forma binómica	$z=-1+i$
Forma polar	$z=\sqrt{2}_{135º}$
Forma trigonométrica	$z=\sqrt{2}\,(\cos 135+i\,\mathrm{sen}\,135)$